ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

© Белова Галина Валентиновна, 2004
зам. директора по УВР школы №34, Петрозаводск

"... будет бессмысленно либо несправедливо говорить, что у людей нет способности к какой-то деятельности, если у них никогда не было возможности попрактиковаться или хотя попробовать себя в ней"
(Дж. Равен)

Учебная исследовательская работа – один из методов проблемного обучения

Цель данной статьи – показать методику организации учебной исследовательской работы (УИР) на уроках математики в среднем звене и обсудить целесообразность ее использования для развития личности учащихся.

Исследовательская работа на уроке – одна из форм постановки и решения проблемной задачи (нетиповой, субъективно новой для ученика).

Под решением проблемной задачи понимают процесс поиска неизвестного, нового (Матюшкин А.М., 1972).

Сравним структуру типовой и проблемной задач.

	Типовая задача	**Проблемная задача**
Особенност и структуры	Условие содержит всю необходимую для решения задачи информацию об исходных данных и о том, что требуется получить в результате.	• Условие задачи вызывает необходимость в получении такого результата, при котором возникает познавательная потребность в новой информации или способе действий. • Наличие неизвестного.
	Существует четкий алгоритм решения задачи	Типового решения не существует или оно неизвестно ученику.
	Наличие у ученика знаний, позволяющих классифицировать задачу (отнести ее к тому или иному конкретному виду типовых задач) и реализовать алгоритм ее решения.	Наличие у ученика возможностей (ресурсов) для выполнения задания, анализа действий, для открытия неизвестного («надо открыть неизвестное, и я это могу»).
Роль ученика	Ученик выполняет роль машины (решает задачу по «заложенной в него» программе).	Ученик проявляется как личность, его действия зависят, в первую очередь, от его мотивов, способностей.

Таким образом, поисковая работа позволяет развивать личность ученика.

Структура детской исследовательской работы

Изучение объекта в математике целесообразно вести в такой последовательности (Белова Г.В., 2003):

- определение;
- элементы (основные и дополнительные);
- свойства;
- признаки (в математике признак – это необходимые и достаточные условия существования объекта);
- применение.

Эта система осваивается нашими учениками с 5-го класса, на ней базируется вся работа в среднем и старшем звене.

Параллельно идет освоение различных этапов учебной исследовательской работы:

- сбора информационного фонда; его анализа;
- построения и применения моделей,
- представления и внедрения результатов исследования.

Структура исследовательской работы отражена на рис. 1.

Сбор и анализ фонда на разных этапах работы играют разную роль. В самом начале эта работа актуализирует знания учеников и позволяет «присвоить» проблему. На более поздних этапах – помогает уточнить границы применимости предполагаемых результатов, уточнить постановку задачи, провести математические эксперименты, высказать и уточнить гипотезы.

Модель позволяет обобщить задачу и перейти от исследования конкретных, «живых» математических объектов к общей математической ее постановке.

На этапе применения ученики ищут и синтезируют новые задачи, в которых будет востребован данный материал, таким образом, присваивая его как инструмент для дальнейшего изучения математики.

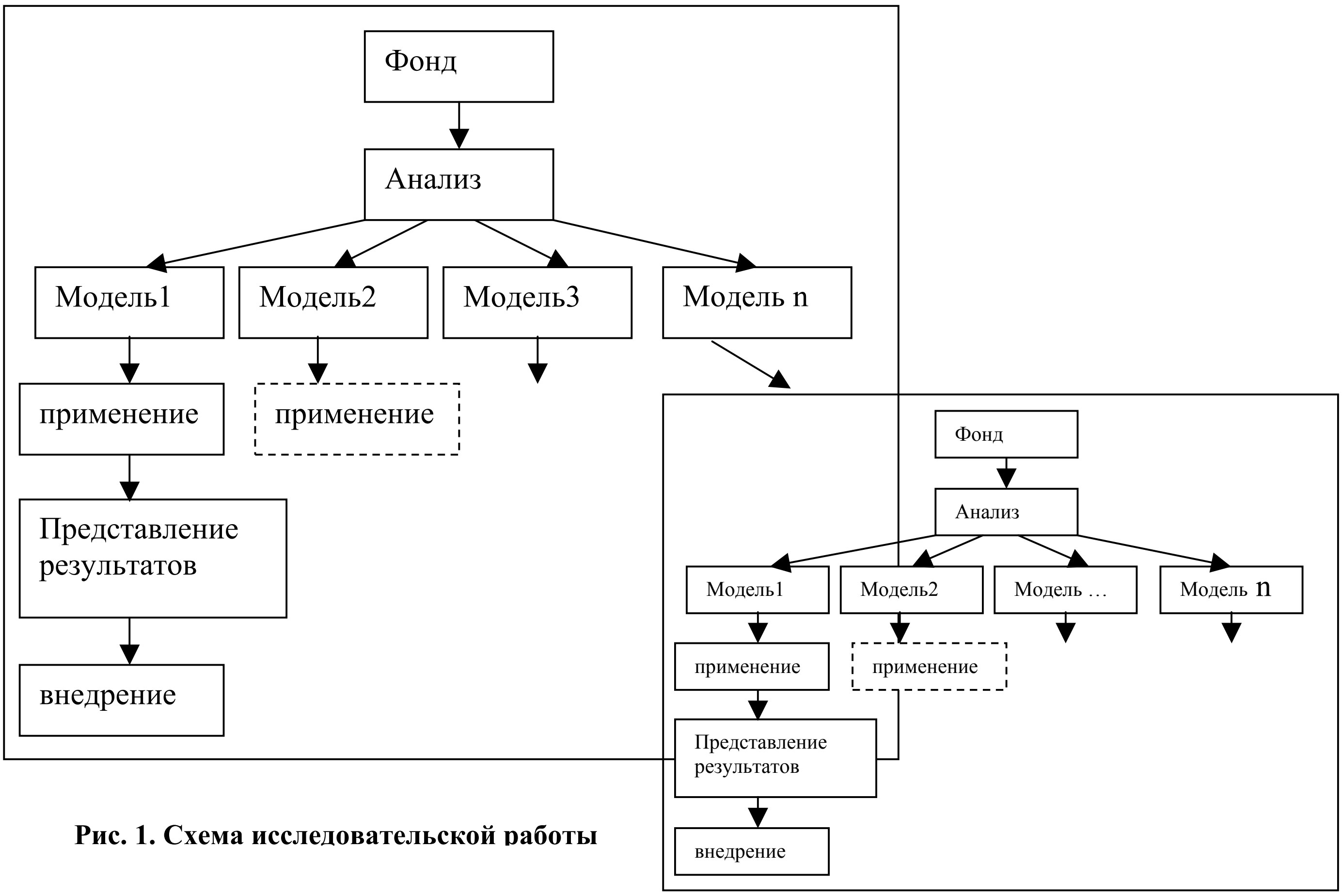


Рис. 1. Схема исследовательской работы

На схеме видно, что организация исследовательской работы предполагает достаточно много вариантов выбора задач исследования. Ученики самостоятельно выбирают модель, с которой они будут работать, решают вопрос о необходимости привлечения дополнительного информационного фонда, могут распределить исследования между разными членами группы в зависимости от их склонностей, интересов, уровней подготовки.

Один пример учебной исследовательской работы

Проиллюстрируем ход учебной исследовательской работы на примере исследования четности функций в 9-м классе.

Напомним: четной называется функция f(x), обладающая следующими свойствами:
1). Область определения функции (D(f)) симметрична относительно начала отсчета;
2). f(-x)=f(x).

Например, функция $y=x^2$: $y(-x)=(-x)^2=((-1)*(x))^2=(-1)^2*x^2=x^2=y(x)$
(У нечетной функции f(-x)=-f(x). Примером может служить функция $y=x^3$).

9 класс. Тема: функции и их свойства (учебник Мордковича).

Тема изучена. Последнее из изученных свойств – четность. Дети умеют исследовать функцию на четность по определению. Изучаемые в школьной программе функции (линейная, квадратичная, степень с натуральным показателем, обратная пропорциональность, корень квадратный, модуль) исследованы на четность.

Задание. Даны 2 функции. Требуется определить четность функции H(x) = F(x) ± G(x), если:
1). F(x) ! четная, G(x) ! четная,
2). F(x) ! нечетная, G(x) – нечетная.

Вместо этого упражнения предлагается групповая исследовательская работа по теме «Взаимосвязь между свойствами функций» на 2 урока.

Класс разбивается на группы.

Группа выбирает вопрос для исследования, планирует свою деятельность, распределяет обязанности и приступает к работе.

Список вопросов для исследования.
- Как связаны между собой четность и монотонность?
- Какова четность суммы двух функций, четность которых известна?
- Какова четность разности двух функций, четность которых известна?
- Какова четность произведения двух функций, четность которых известна?
- Какова четность частного двух функций, четность которых известна?
- Влияние модуля на четность функции.
- Влияние модуля на монотонность функции.

И т.п.

Учащиеся 9 класса имеют инструкцию по проведению исследовательских работ на выявление свойств математических объектов.

Представим инструкцию и возможные результаты по каждому этапу работы на примере темы **«Четность произведения двух функций, четность каждой из которых известна».** Ниже даны пункты инструкции (выделены жирным шрифтом), проиллюстрированные примером выполнения работы одной из групп.

1. Собрать первичный фонд информации.
В блиц режиме из опыта учащихся собирается копилка конкретных примеров известных детям функций:
$y=2x$; $y=-2x+5$; $y=x^2$; $y=x^3$; $y=x^4$; $y=x^5$; $y=|x|$; $y=3/x$; $y=\sqrt{x}$; $y=5$; $y=x$; $y=5x^2+2x-3$…

2. Проанализировать фонд.
На этом этапе учащиеся классифицируют собранный фонд функций по четности.

Функции:		
Четные	**Нечетные**	**«Ни/ни» (функция не является ни четной, ни нечетной)**
$Y=x^2$ $y=x^4$ $y=\|x\|$ $y=5$	$y=2x$ $y=x^3$ $y=x^5$ $y=3/x$ $y=x$	$y=\sqrt{x}$ $y=-2x+5$ $y=5x^2+2x-3$

3. Составить модели для исследования.
Для четности возможны варианты:
1). Ч*Ч; 2).Ч*Н 3). Н*Н 4).Ч * Ни-ни 5). Н * Ни-ни 6). Ни-ни * ни-ни

4. Собрать дополнительный фонд для того, чтобы можно было исследовать все виды моделей.

Ч*Ч	Ч*Н
$y=x^2*x^4$ $y=x^2*\|x\|$ $y=x^4*\|x\|$ $y=(x^4-3)*(-x^2)$	$y= x^2*2x$ $y=x^4*x^3$ $y=\|x\|*3/x$ …

5. Исследовать полученные модели на четность (по заданному вопросу).
Дано: $y= x^2$ – четная;
$y=x^4$ – четная.
Проверить на четность функцию $g=x^2 * x^4$

Исследование.
1). Область определения функции g(x)
D(g): $(-\infty; +\infty)$ – симметричная относительно начала отсчета.
2). $g(-x) = (-x)^2*(-x)^4=(-x)^6=x^6=g(x)$
Из 1) и 2) следует, что функция g(x) – четная.
Аналогично проверяются остальные функции вида Ч*Ч.

6. Сформулировать гипотезу.
В данном случае: Ч*Ч=Ч (произведение двух четных функций есть четная функция).

7. Проверить гипотезу на дополнительном фонде (привести примеры и, если есть – контрпримеры).
$g=(x^4-3)*(-x^2)$
1). Область определения функции g(x)
D(g): $(-\infty; +\infty)$ – симметричная относительно начала отсчета.
2). $g(-x) = ((-x)^4-3)*(-(-x)^2) =(x^4-3)*(-x^2)=g(x)$
Из 1) и 2) следует, что функция g(x) – четная.
Контрпримеров мы здесь не нашли.

8. Сформулировать гипотезу в виде теоремы (если… то…).
Если перемножить 2 четные функции, то в результате получится четная функция.

9. Доказать теорему в общем виде.
Дано.
y=f(x) – четная;
y=p(x) – четная.
Доказать:
g(x) = f(x)*p(x) – четная.

Доказательство.
(a)y=f(x) – четная, следовательно,
D(f) – симметрична относительно начала координат;
f(-x)=f(x)
(b)y=p(x) – четная, следовательно,
D(p) – симметрична относительно начала координат;
p(-x)=p(x)
Для функции g(x) = f(x)* p(x)
$D(g)=D(f)\cap D(p)$ – симметрична относительно начала координат (видно на рисунке области определения). Обычно ученики делают здесь обобщение: пересечение отрезков, симметричных относительно начала отсчета, дает отрезок, симметричный относительно начала отсчета.
g(-x)= f(-x)* p(-x)= f(x)* p(x)=g(x) (по **(a)** и **(b)**).
Из 1) и 2) следует, что g(x) – функция четная, что и требовалось доказать.

10. Выбрать дальнейший путь исследований.
Возможны следующие направления работы:
- увеличивать фонд за счет добавления более сложных функций. Здесь можно доказать теорему о том, что произведение любого количества четных функций есть функция четная (Ч*Ч*Ч*…*Ч=Ч);
- рассмотреть частные случаи (отыскание возможных следствий из доказанной теоремы);
- составить и проверить обратные утверждения.

11. Применить новую модель.
Учащиеся составляют задачи, для решения которых можно использовать доказанные теоремы.
Например:
Определить четность функции $y=x^2*|x|*(x^4-3)*(x^{124}+715)*33333$

12. Представить результаты исследования.
Представление результатов обычно проводится в виде мини-конференции, где поочередно выступают представители каждой группы. Предварительно оформляются отчеты по исследовательской работе, которые вывешиваются в классе. В дальнейшем они используются в учебном процессе.

Результаты исследовательских работ, проведенных учащимися на уроках по данной теме, приведены в приложении.

Таким образом, можно утверждать, что детская исследовательская работа строится по законам настоящей исследовательской научной работы.

«О пользе дела»

Учителя нередко задают вопрос: «Зачем все это нужно? Для чего вместо одного 10-минутного упражнения тратить 2 урока, когда часы на изучение предмета и так урезаются, и программа уплотнена до предела? На этот вопрос автор обычно дает два ответа.

1 ответ – общий: у каждого учителя в данный момент в данном классе своя цель и свои задачи: образовательные, воспитательные, развивающие, и, значит, свои приоритеты. И каждый учитель имеет право решать, что, как и зачем ему делать на своих уроках.

2 ответ – конкретный: зачем это нужно мне, учителю математики, Г.В. Беловой. Здесь несколько аргументов.

1) Цель моей работы как учителя – не оценка и не экзамен и даже не набор математических знаний, умений и навыков. Цель – развитие личности ученика. Учебные исследовательские работы учат грамотно решать проблемы, неважно, научные они или житейские. В решении проблем растет и развивается личность.

2). 9 класс – подростковый возраст. Доминирующий вид деятельности – общение. Главная проблема – мотивационная. А групповая работа в исследовательском режиме удовлетворяет потребность подростка в общении. Ученик испытывает эмоциональный подъем, происходит «обмен желаниями». Все это обеспечивает мотивацию учебной деятельности.
3). Эта форма работы – возможный путь вхождения подростка в пространство культуры, при котором он:

- присваивает нормы и ценности мира взрослых;
- формирует свою внутреннюю позицию по отношению к миру в процессе развития самосознания, ведь в работе нельзя обойтись без самооценки и взаимооценки.

4). Старшая школа – профильная. У каждого направления свои цели и задачи в изучении математики. Для детей из физико-математических классов навыки УИР находят конкретное применение, например, в задачах с параметрами. При этом формируется научный стиль математического мышления, необходимый для учащихся данного профиля.

Ученики гуманитарного профиля развивают умения, которые также востребованы на профильных предметах:

- собирать информацию;
- сравнивать по отдельным параметрам,
- сопоставлять и анализировать,
- обобщать

и т.п.

У учащихся естественно-научного профиля формируется умение проводить эксперименты, которые устроены аналогично и в математике, и в естественных науках и требуют тех же умений.

5). Классические ЗУН на таких уроках отрабатывается нисколько не хуже, чем на обычных. В работе оказываются востребованными все те знания, умения и навыки, что были получены учащимися в процессе изучения темы, а также важнейшие общеучебные умения. В нашем случае актуализируются основные понятия из темы «Функция», некоторые свойства функции, алгоритмы и способы действий, необходимые при работе с ними, схема доказательства.

Но помимо обычных ЗУН и развития важных общеучебных умений ученик получает и нечто большее.

Проследим, что же делал конкретный ребенок в течение этих 2-х уроков:

- выбирал группу;
- планировал работу (договаривался, кто, что, когда будет делать), выбирал тему;
- читал инструкцию, пытался понять ее и объяснить другим;
- совместно с группой вспоминал все функции, которые он знает;
- разбивал функции на группы (классифицировал);
- спорил, доказывая, что одна функция – четная, а другая – нечетная;
- составлял модели и их классифицировал;
- собирал (придумывал) дополнительный фонд,
- объяснял, спрашивал, пытался понять, писал, чертил,…

Сравним это с обычным уроком хотя бы по параметру активности в деятельности. А по речевой активности? По мотивации? По инициативе, которую обязательно проявят здесь наиболее заинтересованные учащиеся? А по уровню коммуникации?

Можно с уверенностью утверждать, что на уроках УИР формируются те самые предметные и общие компетенции, развитием которых так озабочена современная система образования (см., например, Дж. Равен, 2001).

Если в среднем звене сформированы навыки учебной исследовательской работы, в старшей школе можно использовать более сложные формы организации деятельности учащихся, в частности – метод проектов и индивидуальные исследования.

Литература

1. Белова Г.В. Система работы с математическим объектом. [www-документ] http://www.trizminsk.org/e/2350002_5.htm, 2003.
2. Белова Г.В. Творческие копилки на уроках математики. [www-документ] http://www.trizminsk.org/e/prs/232046.htm, 2004.
3. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. –М.: Педагогика, 1972. !168 с.
4. Равен Дж. Педагогическое тестирование: проблемы, заблуждения, перспективы / пер. с англ. Изд. 2-е, испр. – М.: «Когито-центр», 2001 – 142 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ.
Отчеты по результатам учебной исследовательской работы. Тема «Четность функции». 9-А класс гимназии №30, 2002-2003 учебный год.

Влияние знака модуля на четную функцию

$y=x^2$! четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4; +4) – симметричная относительно начала отсчета
2) $f(-x) = x^2$

$y=|x^2|$! четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4; +4) – симметричная
2) $f(-x) = |(-x)^2|=x^2= |x^2|= f(x)$

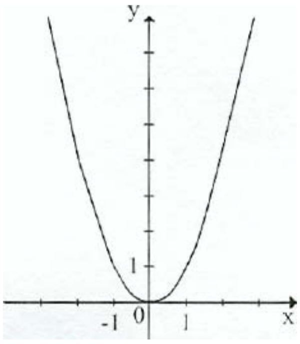


График функции $y=x^2$ совпадает с графиком функции $y=|x^2|$

Предположение: если $y=f(x)$! *четная ФУНКЦИЯ, то $y=|f(x)|$* ! *тоже четная функция.*

Проверим предположение на других функциях:

$y=x^4$-5 ! четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4; +4) ! симметричная
2) $f(-x) = (-x)^4-5=x^4-5=f(x)$

$y=|x^4-5|$!четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4; +4) ! симметричная
2) $f(-x) = |(-x)^4-5|=|x^4-5|=x^4-5$

$y=1/x^2$! четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4; +4) !симметричная
2) $f(-x) = 1/(-x)^2 = 1/x^2=f(x)$

Графики функций $y=(x -5)^2$ и $y=|x -5|^2$

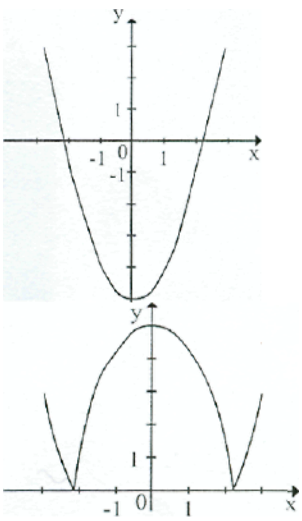
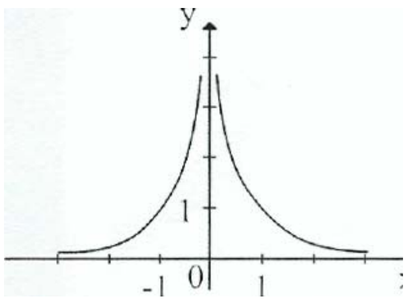


График функции $y=1/x^2$ совпадает с графиком функции $y=|1/x|^2$



Теорема: если $y=f(x)$! четная функция, то $y=|f(x)|$! четная функция.

Докажем эту теорему:

Дано: функция $y=f(x)$! четная

Доказать; $y=|f(x)|$! четная

Доказательство:

1. $y=f(x)$! четная $\Rightarrow$
1)D(f):x 0 (-4; +4) ! симметричная
2)$f(x)=f(-x)$

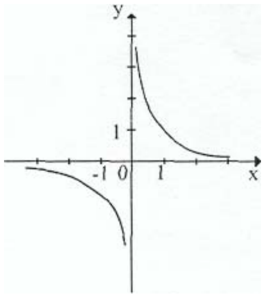
2. Рассмотрим функцию $y=|f(x)|$, она ! четная, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4; +4) ! симметричная
2) $|f(-x)|=|f(x)|$ (следует из пункта 1).

Теорема доказана.

Влияние знака модуля на нечетную функцию

y=1/x ! нечетная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;0)U(0; + 4) ! симметричная
2) f(-x)=l/(-x)=-l/x=-f(x)

y=|1/x| ! четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;0)U(0; + 4) ! симметричная
2) f(-x)= |l/(-x)|= |l/x|=f(x)

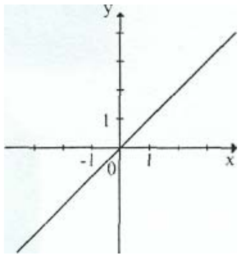


Графики функций y=1/x и y=|1/x|

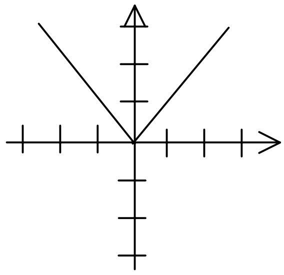
Предположение: если y=f(x) ! *нечетная функция, то y=|f(x)|* ! *четная функции.*

Проверим предположение на других функциях:
y=x – нечетная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;+ 4) – симметричная
2) f(-x)= -x = -f(x)

y=|x| ! четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;+ 4) – симметричная
2) f(-x)=|-x|=x=f(x)

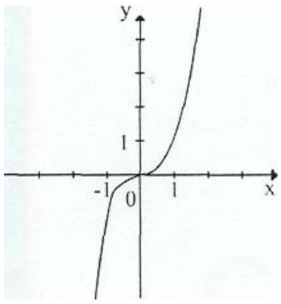


Графики функций y=x и y=|x|

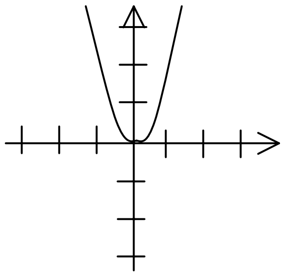


y=x^3 ! нечетная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;+ 4)– симметричная
2) f(-x) = -x^3 = -f(x)

y=|x^3| ! четная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;+ 4)– симметричная
2) f(-x) = |$(-x)^3$| =|x^3| = f(x)



Графики функций y=x^3 и y=|x^3|



Теорема: если y=f(x) ! **нечетная функция, то y=|f(x)|** ! **четная функция.**
Докажем эту теорему:
Дано: функция y=f(x) ! нечетная
Доказать: y=|f(x)| ! четная
Доказательство:
1. f(x) ! нечетная =>
1) D(f) ! симметрична
2) f(-x)=-f(x)

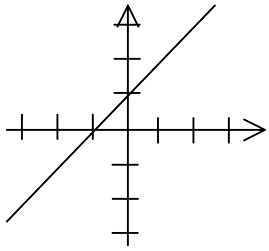
2. Рассмотрим функцию y=|f(x)|, она ! четная, т.к.:
1) D(f) – симметричная
2) |f(-x)|= |-f(x)|= |f(x)|

= > y=|f(x)| ! четная

Теорема доказана.

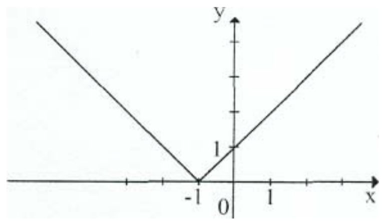
Влияние знака модуля на функцию, которая не является ни четной, ни нечетной

y=x+1 – ни четная, ни нечетная функция, т.к.:
1)D(f)): x 0 (-4;+ 4)– симметричная
2)f(x)=x+1
f(-x)=1-x□f(x)
f(-x)=1-x □-f(x)



Графики функций y=x+1 и y=|x+1|

y=|x+l| – ни четная, ни нечетная функция, т.к.:
1)D(f)): x 0 (-4;+ 4) – симметричная
2)f(x)=|x+1|
f(-x) = |1-x|□f(x)
f(-x) = |l-x|□-f(x)



Предположение: если y=f(x) ! *ни четная, ни нечетная функция, то y=|f(x)|* ! *тоже ни четная, ни нечетная функция.*

Проверим предположение на других функциях:

$y=(x+10)^2$! ни четная, ни нечетная функция, т.к.:
1)D(f)): x 0 (-4;+ 4) – симметричная
2) f(-x) =$(10 -x)^2$□f(x)
f(-x) =$(10 -x)^2$□-f(x)

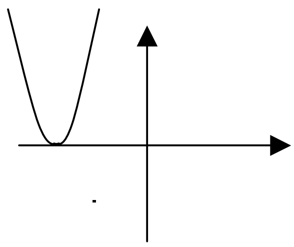
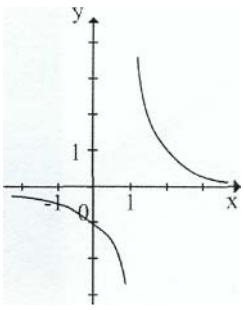


График функции $y=|(x+10)|^2$ совпадает с графиком функции $y=(x+10)^2$

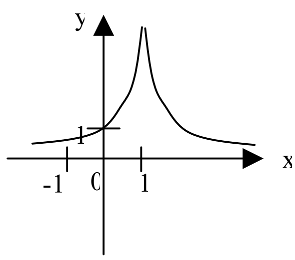
$y=|(x+10)^2|$! ни четная, ни нечетная функция, т.к.
1)D(f)): x 0 (-4;+ 4)– симметричная
2) f(-x) =$|(10 -x)^2|$□f(x)
f(-x) =$|(10 –x)^2|$□-f(x)

y=1/(x-1) – ни четная, ни нечетная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;1)U(1; + 4) ! не симметричная относительно начала отсчета.



Графики функций y=1/(x-1) и y=|1/(x-1)|

y=|1/(x-1)| – ни четная, ни нечетная функция, т.к.:
1) D(f): x 0 (-4;1)U(1; + 4) ! не симметричная.



Теорема: если y=f(x) – ни четная, ни нечетная функция, то y=|f(x)| – ни четная, ни нечетная функция.

Докажем эту теорему:
Дано: функция y=f(x) – ни четная, ни нечетная
Доказать: функция y=|f(x)| – ни четная, ни нечетная
1. f(x) – ни четная, ни нечетная =>
1) f(-x) □ f(x)

2) $f(-x) \neq -f(x)$

2. Рассмотрим функцию $y=|f(x)|$, она ни четная, ни нечетная, т.к.:

$|f(-x)| \neq |f(x)|$, $|f(-x)| \neq -|f(x)|$,

Теорема доказана.

Примечание: здесь приведен реальный вариант работы девятиклассников. Последнее доказательство не является полным (не рассмотрен случай, когда не выполняется только требование симметричности области определения). Вопрос был обсужден при защите проектных работ. Анализ такого рода ошибок, сделанных в процессе учебной исследовательской работы, позволяет мотивировать изучение логики доказательства, в частности – построение утверждений, обратных данным.